Didattica della Matematica - Anno Accademico 1999/2000
Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria
(Prof. Filippo Spagnolo)

Il programma

1. **I Saperi Matematici nella scuola primaria**: rappresentazioni epistemologiche dell'Aritmetica e della Logica. Cenni di Geometria Elementare.

   a. L'introduzione al Numero Naturale e relative operazioni. Gli approcci al numero Naturale: Cardinale, Ordinale, Ricorsivo, Grandezze Geometriche. Gli ampliamenti numerici dai Naturali (N) agli Interi (Z), dagli Interi ai Razionali (Q): metodo delle coppie e metodo assiomatico. Gli algoritmi delle operazioni su N. I decimali. Cenni storici sui numeri Reali.
   b. La Logica proposizionale: strumento di controllo dell'argomentazione (Figure di ragionamento e dimostrazioni).
   c. Cenni di Probabilità.

2. **La trasposizione didattica**:

   a. Analisi critica dei programmi di Matematica per la Scuola Primaria del Marzo 1985.
   b. Analisi di percorsi didattici individuati da testi scolastici in adozione nella scuola primaria. Comparazione di percorsi didattici e ricerca delle invarianti epistemologiche e didattiche.

3. **La ricerca in Didattica delle Matematiche**: un paradigma di riferimento attraverso la teoria delle "Situazioni didattiche".

   a. Analisi "a priori" di una situazione/problema attraverso lo studio delle rappresentazioni epistemologiche, rappresentazioni storico-epistemologiche ed i comportamenti ipotizzati da parte dell'allievo.
   b. Messa a punto di situazioni didattiche su argomenti specifici di Aritmetica.
   c. Analisi critica di una ricerca in Didattica delle Matematiche.

Testi Consigliati:

Didattica, Epistemologia, Ricerca in Didattica delle Matematiche:

a. Filippo Spagnolo, Insegnare le matematiche nella scuola secondaria, La Nuova Italia, 1998. In particolare i capitoli 1, 2, 3, 4, 5, 6 e le appendici 3 e 4.
b. Maria Cutrera - Daniela Lo Verde, Aritmetica (Manuale di Didattica), Sigma Edizioni: Via Leonardo da Vinci, 318 Palermo, 1999.

c. L. Calonghi - C. Coggi, Didattica e sviluppo dell'intelligenza, Tirrenia Stampatori, Torino. In particolare il Cap. 5 (Diagnosi e sviluppo dell'intelligenza in matematica).

Epistemologia:

d. Francesco Speranza et alii, Insegnare la Matematica nella scuola elementare, Zanichelli, 1990. In particolare i capitoli: 1, 2, 3, 7.

Trasposizione didattica:

e. Programmi didattici per la Scuola Primaria del Marzo 1985 (Gazzetta Ufficiale n.76 del 29.3.1985).

Rappresentazioni storico-epistemologiche:

f. Ettore Picutti, Sul Numero e la sua storia, Universale Economica Feltrinelli, 1977, Milano.
g. Georges Ifrah, Storia universale dei numeri, Mondadori,1989, Milano.
h. George GheverghheseJoseph, C'era una volta il numero, Il saggiatore, Milano, 2000.
i. C.B. Boyer, Storia della Matematica, ISEDI, 1976.

1. Le relazioni d'equivalenza e d'ordine

- **La relazione come organizzatore cognitivo fondamentale.**
- **I rapporti con la classificazione piagettiana delle strutture cognitive:**
- **Psico-motorie: strutture algebriche;**
- **Lateralizzazione: strutture d'ordine;**
- **Acquisizione dello spazio: strutture topologiche.**
- **La teoria Ingenua degli Insiemi: utilizzo della teoria come linguaggio. La Teoria degli Insiemi nasce con altri presupposti: una grammatica per l'infinito in atto. Vedi programmi scuola elementare.**
- **La relazione in campo linguistico: Enunciati, predicati, frasi aperte.**

Enunciati: frasi che affermano o negano qualcosa. In matematica sono quelle affermazioni (o negazioni) delle quali si può dire se sono vere o false.

"corri alla lezione!"
"Egli abita a Palermo"

Un enunciato nel quale compare un solo argomento (si parla di un solo individuo) si chiama predicato.

Luigi cammina
2 è pari

sono predicati a un posto

Predicati a due posti: relazioni
"Le strutture sintattiche di un enunciato semplice sono quelle argomento-predicato, e quella di predicati che mettono in relazione il soggetto con un altro."

2 *è minore d*i 3
Piero *mangia* una mela

Consideriamo adesso la seguente relazione (predicato a due posti, frase aperta con due variabili):

x è un capoluogo di provincia di y

definite sui seguenti insiemi:

A={Aosta, Como, Modena, Enna, Bergamo, Trapani, Lecce, Taranto}
B={Lombardia, Sicilia, Emilia-Romagna, Puglie, Umbria}

Quanti sono i possibili casi?

	Lombardia	**Emilia-Romagna**	**Umbria**	**Sicilia**	**Pglie**

Aosta					
Como					
Modena					
Enna					
Bergamo					
Trapani					
Lecce					
Taranto					

Prodotto Cartesiano
Relazione come sottoinsieme del prodotto cartesiano di due insiemi.
La relazione individuata dal predicato a due posti P fra gli insiemi A, B è l'insieme delle coppie ordinate (x, y) che rendono vera Pxy, vale a dire l'insieme
$\{(x,y) : x \in A, y \in B, Pxy\}$

Esercizio:
$A=B=\{3, 5, 7, 9\}$ ed il predicato "…<…"

Determinare l'insieme delle coppie che individuano la relazione.

Le relazioni di equivalenza ρ:

4. **Riflessiva $\forall x \in A \rightarrow x\rho x$**
5. **Simmetrica $\forall x,y \in A$ se $x\rho y$ allora $y\rho x$**
6. **Transitiva $\forall x,y,z \in A$ se $x\rho y$ e $y\rho z$ allora $x\rho z$**

Le classi di equivalenza: esempi.

La relazione d'ordine $\leq$:

- **Riflessiva $\forall x \in A \rightarrow x \leq x$**
- **Antisimmetrica $\forall x,y \in A$ se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x=y$**
- **Transitiva $\forall x,y,z \in A$ se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$**

- **$\forall x,y \in A$ $x \leq y$ oppure (vel) $y \leq x$**

"x è multiplo di y" ordine parziale 1, 2, 3
(5 non è multiplo di 2 e 2 non è multiplo di 5) (anche <)
"x ≤ y" ordine totale 1, 2, 3, 4
(due elementi si possono sempre confrontare)

Gli approcci al Numero Naturale:

L'idea del numero naturale è complessa e richiede pertanto "un approccio che si avvale di diversi punti di vista (ordinalità , cardinalità, misura, insiemistica,

ricorsività , etc...) " [3] e viene acquisita dopo lunga interiorizzazione da parte del bambino.

1. **Approccio insiemistico (cardinale) - Russell**
2. **Approccio ordinale**
3. **Approccio ricorsivo - Peano**
4. **Approccio basato sulla misura**

In *"Arithmetices Principa nova methodo exposita"* [1] del 1889 G.Peano espone l'Aritmetica in forma di *sistema ipotetico-deduttivo*, assumendo quattro concetti primitivi (*numero, unità, successivo e uguale*) e nove assiomi (di cui quattro riguardanti l'eguaglianza).

In seguito assumerà soltanto i concetti primitivi di zero, numero naturale, e successivo di un numero naturale.

d. I numeri naturali formano una classe (insieme);
e. Zero è un numero naturale;
f. Il successivo di un numero naturale è un numero naturale;
g. Numeri naturali che hanno lo stesso successivo sono uguali;
h. Zero non è successivo di alcun numero naturale;
i. Sia S una classe: se zero è un elemento di S e se ogni qulavolta un numero naturale x sta in S anche il successivo di x sta in S, allora tutta la classe dei numeri naturali è contenuta in S.

Modelli per gli assiomi di Peano:

$N=\{1, 2, ..., n, ...\}$	dove "1" sta per "unità" ed $n'=n+1$ per "successivo".
$N_0=\{0, 1, 2, ..., n, ...\}$	dove "0" sta per "zero" ed $n'=n+1$ per "successivo".
$P=\{2, 4, ..., 2n, ...\}$	dove "2" sta per "unità" e $(2n)'=2n+2$ per "successivo".
$P_0=\{0, 2, 4, .., 2n, ...\}$	dove "0" sta per "unità" e $(2n)'=2n+2$ per "successivo".
$M=\{n, 2n, 3n, .., kn,...\}$	dove "n" sta per "unità" e $(kn)'=kn+n$ per "successivo".
$M_0=\{0, n, 2n, .., kn, ...\}$	dove "0" sta per "zero" e $(kn)'=kn+n$ per "successivo».
Per $a\neq 0, A=\{1/a, 1/a^2,.., 1/a^k, ..\}$	dove "1/a" sta per "unità" ed $(1/a^k)'=1/a^k\cdot 1/a$ per "successivo".
Per $a\neq 0, A_0=\{1/a^0, 1/a, ..., 1/a^k, ...\}$	dove "$1/a^0$ "sta per "zero" e $(1/a^k)'=1/a^k\cdot 1/a$ per "successivo".
Per $b\neq 0, B=\{b, b^2, ..., b^k, ...\}$	dove "b" sta per "unità" e $(b^k)'=b^k\cdot b$ per "successivo".
Per $b\neq 0, B_0=\{b^0, b, ..., b^k, ...\}$	dove "b^0 " sta per "zero" e $(b^k)'=b^k\cdot b$ per "successivo".

[1]- art.16,[22]

***La struttura N_0 (+, ·) è più ricca della struttura N (+, ·)* in quanto possiede un elemento neutro rispetto ad entrambi le operazioni; l'elemento neutro dell'operazione di moltiplicazione si comporta in entrambi i modelli in maniera ″naturale″ rispetto all'operazione di addizione mentre l'elemento neutro dell'addizione ha rispetto all'operazione di moltiplicazione *un comportamento ″non naturale″*, in quanto $n \cdot 0=0 \ \forall n \in N$, cioè "lo zero distrugge" ogni naturale; *segue quindi* che l'elemento neutro dell'addizione non ha comportamento *"naturale*" anche rispetto all'operazione di divisione, inversa della moltiplicazione.**

2. Il principio di Induzione completa

Sia N l'insieme dei numeri nNaturali; ad ogni numero naturale n corrisponda una proposizione P_n. Se accade che:

- **P_0 è vera.**
- **Se P_m è vera allora è vera anche $P_{m'}$ (essendo m' il successivo del numero naturale m)**

<u>Allora P_n è vera $\forall$ $n \in N$.</u>

1. **I numeri naturali formano una classe (insieme);**
2. **Zero è un numero naturale;**
3. **Il successivo di un numero naturale è un numero naturale;**
4. **Numeri naturali che hanno lo stesso successivo sono uguali;**
5. **Zero non è successivo di alcun numero naturale;**
6. **Sia S una classe: se zero è un elemento di S e se ogni qulavolta un numero naturale x sta in S anche il successivo di x sta in S, allora tutta la classe dei numeri naturali è contenuta in S.**

Dimostrazione: Sia M il sottoinsieme di N tale che P_m è vera per tutti e soli gli $m \in M$. Si ha $0 \in M$ e ogni qualvolta un numero naturale x sta in M allora sta in M anche il successivo di x. Allora, per l'assioma 5; $N \subseteq M$; ma per ipotesi M è formato da numeri naurali, cioè $M \subseteq N$; ne segue che M=N cioè P_n è vera per ogni $n \in N$.

<u>Le operazioni in N con gli assiomi del Peano.</u>

<u>L'addizione.</u>

a. $a+0=a$
b. $a+b'=(a+b)'$

Dimostriamo con l'induzione che:
"Ad ogni naturale n associamo la proposizione P_n: Esiste il numero naturale a+n."
(cioè la defінzione 2 è ben posta).

a. **P_0 è vera: a+0=a ed a è un numero naturale.**
b. **Se P_m è vera allora esiste il numero naturale a+m e dunque anche il suo successivo (a+m)' è un numero naturale (assioma 2); poiché per definizione è a+m'=(a+m)' esiste il numero naturale a+m' e quindi $P_{m'}$ è vera.**

Allora per il principio di induzione completa, P_n risulta vera $\forall$ $n \in N$, cioè esiste il

numero naturale a+n, qualunque sia il numero naturale n.

Le proprietà delle operazioni si possono tutte dimostrare con il principio di induzione completa: associativa, commutativa.

La moltiplicazione.

a. $a \bullet 0 = a$

b. $a \bullet b' = (a \bullet b) + a$ essendo $a,b \in N$ e b' il successivo di b.

Si dimostra per induzione. Come anche le proprietà associativa e commutativa.

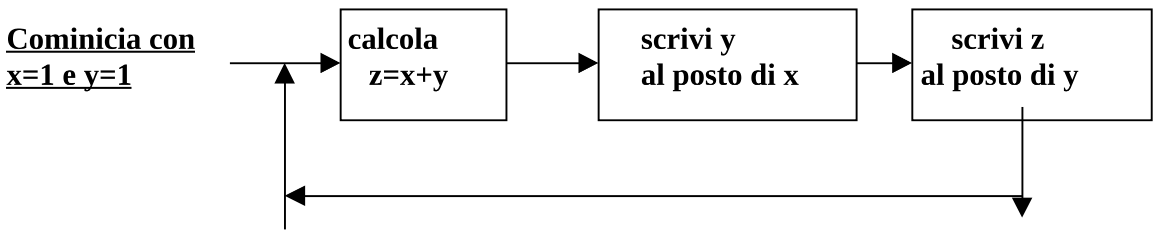
Ordinamento.

Presi $a,b \in N$, si dice che a è minore o uguale a b, e si scrive $a \leq b$, s esiste un $c \in N$ tale che $b=a+c$.

Presi $a,b \in N$ si dice che $a<b$ se è $a \leq b$ e $a \neq b$.

La ricorsività.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …



2.1 L'approccio Cardinale.

Per l'approccio cardinale è indispensabile avere come pre-requisito la conoscenza della teoria ingenua degli insiemi.
Introdurre poi una relazione:
"… essere eqipotente…", due insiemi sono equipotenti se possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra di loro.

- **Nel caso finito;**
- **Nel caso infinito: Cantor.**

L'unione di due insiemi (∪): corrisponde alla somma se i due insiemi sono disgiunti.

<u>Addizione.</u>
$\forall$ m,n$\in$N, siano A e B tali che $A\cap B=\emptyset$ e tale che card A= m e Card B= n.
Si definisce m+n=Card ($A\cup B$).

<u>Sottrazione.</u>
Sia A un isnieme finito, Card A=m; sia $B\subseteq A$, CardB=n;
si definisce m-n=Card (A\B).
(A\B= differenza tra due insiemi)

<u>Moltiplicazione.</u>
Siano m,n$\in$N; siano A, B due insiemi (non necessariamente disgiunti) tali che Card A=m, Card B=n.
Si definisce m•n=card (AxB)

<u>Divisione.</u>

Sia A un insieme. Per partizione di A si intende ogni suddivisione degli elementi di A a due due disgiunti.
Se è possibile ripartire gli elementi di A in insiemi a due a due disgiunti ciascuno costituito da b elementi, diremo che il naturale a è divisibile per il naturale b e chiameremo quoziente di a per b il numero q degli insiemi della partizione.

2.2 Approccio ordinale.

Nell'approccio ordinale gli elementi da prendere in considerazione sono:

- **La corrispondenza biunivoca;**
- **La relazione d'ordine.**

Quindi si definirà una corrispondenza biunivoca tra un determinato insieme A e l'insieme N. La corrispondenza biunivova ordinata sarà anche chiamata isomorfismo d'ordine.

N rappresenta:

- **sia la card A (corrispondenza biunivoca)**
- **sia una corrispondenza biunivoca ordinata.**

2.3 Gli ampliamenti numerici.

2.4 La struttura algebrica.

N(+)

- **elemento neutro;**
- **associativa;**
- **commutativa;**
- **opposto.**

Esempio di Gruppo.

Consideriamo NxN=N^2 = {(a,b) / a,b$\in$N}
Definiamo in N^2 la seguente relazione ρ:

(a,b) ρ (c,d) se a+d=b+c.

(5,3) ρ (12,10) poiché 5+10=3+12.

Si verifica che ρ è una relazione di equivalenza.
Le classi di equivalenza subordinate da questa relazione costituiscono l'insieme quoziente N^2/ρ.
Chiameremo Z questo insieme.

3. Gli ampliamenti numerici con il metodo delle coppie.

Consideriamo NxN=N^2 = {(a,b) / a,b$\in$N}
Definiamo in N^2 la seguente relazione ρ:

(a,b) ρ (c,d) se a+d=b+c.

(5,3) ρ (12,10) poiché 5+10=3+12.

Si verifica che ρ è una relazione di equivalenza.

- **Riflessiva: (a,b) ρ (a,b) → a+b=a+b**

- **Simmetrica: Se (a,b) ρ (c,d) → (c,d) ρ (a,b)**
  a+d=b+c c+b=d+a

- **Transitiva: Se (a,b) ρ (c,d) e (c,d) ρ (e,f) →**
  (a,b) ρ (e,f)

a+d=b+c e c+f=d+e
sommando membro a membro si ha: a+d+c+f=b+c+d+e semplificando
a+f=b+e che equivale alla relazione
(a,b) ρ (e,f).

Le classi di equivalenza subordinate da questa relazione costituiscono l'insieme quoziente N^2/ρ.
Chiameremo Z questo insieme.

Allo stesso modo si può introdurre l'insieme dei Razionali.
Si consideri ZxZ l'insieme delle coppie ordinate che hanno per primo elemento un intero e per secondo elemento un intero.
Si introduca adesso la relazione ρ nel seguente modo:
(a,b) ρ (c,d) se ad=bc.

Si verifica che questa relazione è di equivalenza.
Si quozienterà Z^2/ρ. L'insieme che si sarà ottenuto è l'insieme dei numeri Razionali.
In tutte e due le operazioni è stata introdotta una <u>relazione esterna</u> che ha permesso l'ampliamento numerico.

Alcune osservazioni storiche sui Reali.

4. Cenni di LOGICA

Parole, frasi, enunciati.
Un enunciato: è una frase che afferma o nega qualcosa, della quale si può dire se è vera o falsa in un determinato contesto.
Ma da singoli enunciati si possono costruire altre enunciato con l'uso di connettivi del tipo "e" "o".

Operatori logici fondamentali	**Latino**	**Hilbert**	**Informatico**
La congiunzione logica	**$P=P_1$ et P_2**	**$P=P_1 \wedge P_2$**	**$P= P_1$ AND P_2**
La disgiunzione inclusiva	**$P=P_1$ vel P_2**	**$P=P_1 \vee P_2$**	**$P= P_1$ OR P_2**
La negazione logica	**$P=$ non P_1**	**$P= \overline{P}_1$**	**$P=$ NOT P_1**

- **Intersezione di insiemi: ET**
- **Unione di insiemi: VEL**
- **Insieme complementare: NON**

Le relazioni servono per introdurre la logica dei predicati.
Leggere i programmi ministeriali e commentarli.
Verificare i contenuti esposti nei programmi e commentarli.

5. Un percorso per l'elaborazione di una ricerca in didattica delle Matematiche

Laboratori didattici ***Dall'analisi a priori di una situazione didattica alle ipotesi della*** ***ricerca in didattica***	*L'introduzione del nuovo tema, "la ricerca in didattica", all'interno del progetto "laboratori didattici", è in linea con la necessità di porsi in un'ottica di sperimentazione nei confronti di una didattica che ha bisogno di una autonomia pragmatica.*
Percorso della ricerca in didattica data una situazione/problema, il punto di partenza è la relativa **analisi a priori** e cioè l'insieme di: 1) **rappresentazioni epistemologiche** (percorsi conoscitivi in un determinato periodo storico) 2) **rappresentazioni storico-epistemologiche** (percorsi conoscitivi sintattici, semantici,pragmatici) 3) **comportamenti ipotizzati** sarà quindi possibile individuare i "**problemi di ricerca**" e le "**ipotesi**" necessarie per quella	*Il percorso così come viene presentato è uno dei percorsi ipotizzabili. E' ovviamente possibile all'interno dello stesso modificare i" pesi" delle singole fasi di cui si compone, ottenendo così ricerche che privilegiano ora le rappresentazioni epistemologiche, ora l'analisi dei comportamenti.* *La scelta del buon problema è fondamentale se si vuole dare un carattere di significatività a tutto il lavoro. Qui è l'esperienza dell'insegnante che indirizza verso quei nodi cruciali che si incontrano durante l'insegnamento della matematica e per i quali è nota la frequenza degli insuccessi degli alunni.* *Le rappresentazioni epistemologiche e storico-*

determinata classe di problemi presa in esame. La scelta del buon problema è demandata alla conoscenza dell'insegnante sia per quanto riguarda gli aspetti epistemologici e storico-epistemologici, che per quanto riguarda le conoscenze sulla comunicazione della sua materia.	*epistemologiche impegnano ad un lavoro che può essere di per sé compiuto, nel momento in cui queste stesse sono state svolte attraverso una ricerca critico-comparativa sui documenti disponibili e trattano in maniera esaustiva i possibili approcci all'argomento in questione.*
Dal buon problema attraverso l'analisi dei **comportamenti ipotizzabili** si passa alla formulazione delle **"ipotesi di ricerca**" che saranno formulate (implicitamente o esplicitamente) nella forma: **se… allora…** Caratteristica fondamentale di una ipotesi è la sua **falsificabilità**, ovvero la possibilità, attraverso tentativi sistematici, di dimostrarne la falsità.	*La fase della formulazione dell'ipotesi richiede molta attenzione. Non è difficile per chi insegna intuire quali sono gli ostacoli all'apprendimento durante un percorso di insegnamento, è molto più difficile però ipotizzare in termini precisi di acquisizioni, che cosa favorisce l'apprendimento in una determinata situazione didattica.* *La falsificabilità è nei termini in cui la definisce K. Popper.*

La consegna per il lavoro del gruppo · Individuare delle situazioni/problema riguardanti la padronanza teorica ed operativa del **"pensiero proporzionale /preproporzionale"** utilizzando i linguaggi matematici · Attraverso la riflessione sui possibili percorsi s'individui un'unica situazione-problema sulla quale si centrerà l'analisi a priori.	*Nel contesto dello stage a Isola delle Femmine l'argomento è stato dato al gruppo dagli animatori.* *Secondo la propria formazione e le proprie esperienze di lavoro ciascuno ha inquadrato l'argomento nella prospettiva che riteneva più interessante e la pluralità di pensieri diversi è stata una notevole risorsa per tutto il proseguo del lavoro.*
Relazioni storico-epistemologiche Per l'**aritmetica** : il postulato di Eudosso Archimede (multipli e sottomultipli, ricerca del quarto proporzionale…) Per la **geometria elementare euclidea**: gli elementi di Euclide libro V, teoria delle proporzioni fra grandezze omogenee ed archimedee, l'assiomatizzazione hilbertiana. Per la **geometria analitica**: l'equazione della retta (proporzionalità diretta), l'equazione dell'iperbole (proporzionalità indiretta). Per le **grandezze**: l'evoluzione dei sistemi di misura.	*I percorsi storici ed epistemologici che fanno da supporto al pensiero proporzionale, in quella sede sono stati solo affrontati per grandi linee, cercando di individuare i possibili approcci dal punto di vista dell'insegnamento.* *Sarebbe interessante approfondire la ricerca in questa direzione anche alla luce del fatto che tutti i gruppi hanno privilegiato l'aspetto aritmetico e quello della geometria elementare euclidea.* *I riferimenti di maggiore interesse sono riportati nella bibliografia.*
La situazione didattica	*Il problema scelto ha come caratteristica*

Il gruppo ha scelto di lavorare nell'ambito dell'aritmetica e delle grandezze nell'intento di cogliere da questa prospettiva le possibili strategie di approccio al pensiero preproporzionale e proporzionale.Il testo del problema scelto è: ***Una macchina in 8 ore confeziona 600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna. Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?***	*principale quella di poter essere affrontato da ragazzi in diverse età scolari. Il gruppo di insegnanti presenti allo stage era infatti eterogeneo per formazione e tipologia di insegnamento. Questo problema è proponibile sia per una quinta elementare che per una seconda media che per un primo anno di scuola superiore.*
Analisi dei comportamenti ipotizzabili. Questa fase consiste nell'ipotizzare diverse strategie risolutive del problema, analizzarne i procedimenti e i possibili errori alla luce dell'esperienza acquisita nell'insegnamento.	*Di seguito è presentata solo una parte dell'analisi dei comportamenti effettivamente affrontata durante lo stage. E' comunque la prima strategia quella sulla quale si concentrerà l'attenzione del gruppo per arrivare alla formulazione di ipotesi di ricerca.*
Strategia n. 1 L'elemento su cui si ferma l'attenzione è "l'unità" bottiglia; le scatole vengono viste come gruppi di bottiglie, ciò giustifica la prima operazione: si cerca successivamente il numero di bottiglie lavorate in un'ora : $\frac{7200bt}{8h} = 900\frac{bt}{h}$ si trova il numero di bottiglie lavorate in 14 ore : $900bt/h$ x 14h = 12600bt quindi le bottiglie si raggruppano a 6 a 6 ottenendo così il numero delle scatole confezionate in 14 ore : $\frac{12600bt}{6bt/sc} = 2100sc$	***Analisi*** *Si caratterizza come* ***procedimento di riduzione all'unità****, dove di volta in volta l'unità è la bottiglia, l'ora o la scatola.* *Probabilmente nell'esecuzione l'allievo lavora con gli scalari, tralasciando le grandezze pur essendo consapevole delle dimensioni dei risultati che via via ottiene e della dimensione del risultato finale.* *L'utilizzo delle grandezze con la loro dimensione richiederebbe dimestichezza con le grandezze derivate come per esempio nella prima operazione :* $600sc$ x 12bt/sc = 7200bt *La risoluzione del problema attraverso questa strategia rientra in un processo* ***preproporzionale****.*

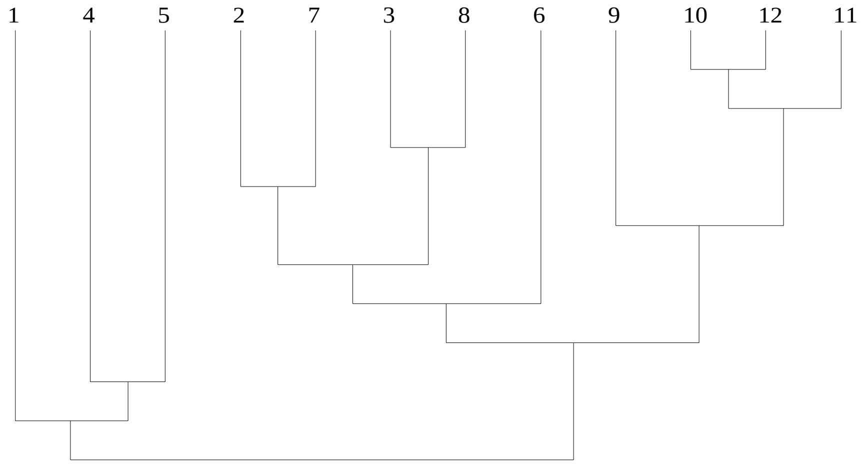
Strategia n. 2 L'osservazione sulla seguente relazione tra i dati 14 e 8: $$14 = 8 + 4 + 2$$ e cioè che 14 viene espresso come somma di addendi ognuno la metà del precedente a partire da 8, induce un processo di analoga scomposizione del numero delle scatole 8 4 2 600 300 150 processo dal quale si evidenzia che il numero totale di scatole da 12 bottiglie lavorate in 14 ore è : $$600 + 300 + 150 = 1050$$ L'osservazione che il numero di bottiglie per scatola (6) è, nel caso richiesto, la metà rispetto alla situazione iniziale (12), porta alla determinazione della soluzione : $$1050 \times 2 = 2100$$	***Analisi*** *In questo percorso l'attenzione resta ferma alle informazioni iniziali del testo che vengono elaborate in un processo di frazionamento e allo stesso tempo di iterazione del pensiero: "se in otto ore la macchina confezione 600 scatole da 12 bottiglie ciascuna, in quattro ore confezionerà trecento scatole da 12 bottiglie ciascuna, in due ore…". La strategia si caratterizza come procedimento* **dicotomico** *che prevede una logica di tipo informatico per la descrizione locale delle variabili :* *14= 8 + 4 (metà di 8) + 2 (metà di 4).* *L'utilizzo della metà fa rientrare la strategia in una logica* ***preproporzionale****.*
Strategia n. 3 L'osservazione sulla seguente relazione tra i dati 14 e 8 : $$14 = 8 + 6 = 8 + \frac{3}{4} \times 8$$ dove 14 è espresso come somma di due addendi, 8 e i suoi 3/4, porta ad una analoga visione del numero delle scatole da 12 bottiglie lavorate in 14 ore : $$600sc + \frac{3}{4} \times 600sc = 600sc + 450sc = 1050sc$$ e dunque $$1050 \times 2 = 2100$$ scatole da sei bottiglie.	***Analisi*** *Il processo si articola sull'utilizzo di una* ***frazione come operatore*** *e su una scomposizione di tipo additivo :* $$14 = 8 + 6 = 8 + \frac{3}{4} \times 8$$ *configurandosi come processo* ***preproporzionale****.*

Osservazioni Probabilmente durante i calcoli l'alunno non fa riferimento alle relative grandezze, lavora solo con gli scalari ma comunque riconosce la grandezza del risultato finale. Le difficoltà che gli alunni incontrano nell'uso della proporzionalità diretta sono dello stesso livello di quelle che incontrano per la proporzionalità inversa? Apportando adeguate modifiche al testo si può guidare l'alunno verso un approccio risolutivo corretto?	*L'analisi dimensionale delle grandezze è uno strumento di controllo della coerenza interna di un percorso risolutivo, ma anche momento incentivante di creazione di possibili strategie o di ragionamenti di tipo esclusivo. Infatti tale analisi se costantemente e correttamente applicata* 7. *evoca l'immaginario liberando le rappresentazione mentali delle situazioni in oggetto* 8. *evita tutti quegli errori di non senso che derivano dalla perdita di significato delle informazioni e dalla loro riduzione al rango di numeri senza dimensione e per questo suscettibili di essere manipolati come segni.*
Analisi del testo Sono stati prodotti sei testi modificati e di ciascuno di essi è stata analizzata la possibilità di restringere il campo degli errori e delle false interpretazioni. E' prevalso il criterio che l'introduzione di altri quesiti relativi ai risultati intermedi possa attirare l'attenzione dell'alunno sul punto chiave del problema.	*Molte osservazioni sulla natura del testo di un problema o in generale di un quesito sono state riprese alla fine di questo lavoro e hanno portato a considerazioni interessanti circa la "validità" di una prova.*
Ipotesi di ricerca 1) Se l'alunno ha acquisito la struttura moltiplicativa allora è in grado di effettuare la riduzione all'unità e la divisione come ripartizione. 2) Se l'alunno ha acquisito il concetto di divisione come contenenza allora è in grado di usare correttamente le grandezze derivate. 3**) Se l'alunno possiede il controllo dimensionale allora ha il dominio della coerenza interna del percorso risolutivo di una classe di problemi che si modellizzano attraverso la struttura moltiplicativa e di riduzione all'unità**.	*La formulazione di queste ipotesi di ricerca è avvenuta in seguito alle riflessioni fatte sulla natura dei possibili errori degli alunni in presenza del problema analizzato.* ***La terza è l'ipotesi presa in considerazione in questo lavoro. Nasce dalle osservazioni esposte precedentemente circa il ruolo che può avere nel percorso risolutivo di un problema, come quello preso in considerazione, il controllo sulla natura delle grandezze che man mano entrano in giuoco.***
Strumenti per la falsificabilità delle ipotesi	*Per falsificare l'ipotesi 3 si è elaborato un*

E’ necessario predisporre, in questa fase di sperimentazione, appositi strumenti quali possono essere i questionari, le interviste singole o a coppie, le registrazioni audio/video di situazioni didattiche complesse che permettano di “andare contro” l’ipotesi. Deve essere ben definito anche l’insieme di alunni (per fascia di età) sui quali sperimentare le prove.	*questionario, di seguito allegato, che presenta sia quesiti relativi alle grandezze omogenee sia quelli relativi alle grandezze derivate ma anche problemi della stessa natura di quello qui preso in esame.* *Il questionario è rivolto ad una quinta elementare, ad una seconda media e ad un primo anno di scuola superiore.*

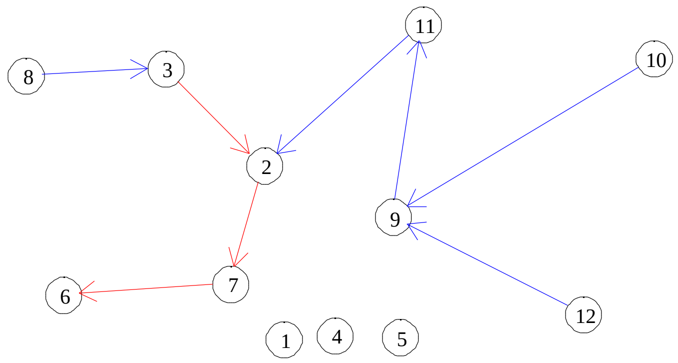
6.1 *I dati relativi alla scuola elementare*

grafo delle similarità



Arbre de similarité : C:\Drv\Documenti\Marilina\grim\queselem.csv

grafico delle implicazioni:



Graphe implicatif : 99 95 90 85

Il grafo della similarità.

I raggruppamenti di variabili che appaiono evidenti sono tre: R1=[Q1-Q4-Q5] , R2=[Q2-Q7-Q3-Q8-Q6] e R3=[Q9-Q10-Q12-Q11].

I quesiti relativi a R2 riguardano tutti le grandezze omogenee e quelli relativi a R3 le grandezze non omogenee; complessivamente la similarità tra il gruppo R2 ed R3 può essere considerato ancora degna di attenzione.

Il grafo delle implicazioni: Il grafo è stato stampato con parametro 95 (intensità dell'implicazione 95%). La lettura è abbastanza facile: il Q12 implica direttamente o indirettamente Q9, Q11, Q2, Q7,Q6 ma non è implicato, con questa intensità, da nessuna variabile. Ciò significa che "è necessario sa per rispondere ai quesiti Q9,Q11, Q2, Q7, Q6 per poter rispondere al Q12". In altre parole, chi ha saputo rispondere a quei quesiti (Q9, Q11,ecc..) ha anche saputo rispondere al Q12.

Ad un livello di intensità molto meno significativa c'è implicazione dal Q10 al Q12.

E' stato elaborato un grafo di implicazione relativo ad una tabella che restringeva gli individui a quelli che avevano 1 in Q12: non si è avuta una doppia implicazione (cioè anche verso Q12) e questo per la natura stessa dell'analisi implicativa. Infatti in una situazione del genere non c'è più alcuna correlazione tra le variabili perché la significatività è data dagli individui che hanno risposte errate.

6.3 Formulazione della nuova ipotesi

Una nuova analisi sul questionario e sul modulo di lavoro proposto dalle insegnanti nelle tre classi, ha messo in luce che: per le classi quinta elementare e seconda media, il questionario è stato somministrato in una fase di primo approccio al pensiero proporzionale, in cui le grandezze giocano un ruolo prioritario e il rapporto tra grandezze (omogenee e non) pur essendo stato visto sotto diversi punti di vista aveva finito col perdere il significato di "divisione". Divisione per ripartizione e/o per contenenza sono infatti presenti nella categoria di problemi affrontata e convergono nell'argomento " rapporti tra grandezze" non appena si passa da grandezze omogenee a grandezze non omogenee; è proprio questo passaggio forse il punto focale dell'ipotesi. Per il primo anno di superiori, invece, l'argomento era noto ma non "attuale" rispetto al programma in corso di svolgimento; pertanto, come è stato già osservato, i risultati non sono stati ritenuti del tutto attendibili.

Queste e altre considerazioni hanno portato ad una revisione dell'ipotesi che è stata così riformulata:

"Il saper adoperare correttamente i rapporti tra grandezze omogenee e non, tenendo sempre presente il loro significato intrinseco di divisione, favorisce, con il controllo della coerenza interna, i percorsi risolutivi di una classe di problemi che si modellizzano attraverso una struttura moltiplicativa e di riduzione all'unità".

Formulazione del nuovo questionario

Conclusioni

7. Esempio di lezione per individuare le differenti situazioni di insegnamento

Il gioco della "La corsa a 20"
Obiettivo generale
L'obbiettivo di questa lezione è quello di poter introdurre una revisione della divisione (nelle circostanze dove il "senso dell'operazione" non è conforme agli apprendimenti anteriori) e di favorire la scoperta e la dimostrazione, da parte degli allievi, di una successione di teoremi.

Il gioco
Due giocatori debbono poter riuscir a dire 20 aggiungendo 1 o 2 al numero detto da l'altro. Se il primo giocatore dice ad esempio 3, l'altro potrà dire 4 o 5, e così via.

Principali fasi del gioco

1ª fase: Spiegazione della procedura.
Il professore spiega la regola del gioco e comincia una partita contro un allievo, poi il professore passa la mano ad un altro allievo.

2ª fase: Gioco di uno contro uno.
Gli allievi giocano per gruppi di 2 (consta di parecchie parti). Segnano su di un foglio i numeri scelti da una parte e dall'altra. Questa fase deve comprendere circa 4 parti e durare massimo 10 minuti.
Si osservi che nel corso di questa fase gli allievi applicano la regola.
Alcuni, senza averne coscienza, si rendono conto che rispondere a caso non è la migliore strategia: essi provano gli obblighi del gioco al livello dell'azione e delle decisioni immediate e si danno una serie di esempi. Altri scoprono implicitamente un vantaggio a dire 17.

3ª fase: Gioco di un gruppo contro un'altro gruppo.(15 Minuti circa)
Gli allievi sono divisi in gruppi. Per ciascuno dei due gruppi l'insegnante designa un porta voce.
I ragazzi si rendono molto presto conto della necessità di concentrasi e discutere all'interno del proprio gruppo per comunicarsi le strategie. Le prime cominciano ad apparire: "bisogna dire 17"…

4ª fase: Gioco della scoperta (da 20 a 25 minuti)
Il professore domanda agli allievi d'enunciare delle proposizioni. Queste sono le scoperte che hanno permesso di vincere. Queste scoperte enunciate, alternativamente dal gruppo A, poi dal gruppo B, sono scritte alla lavagna dal professore e verificate

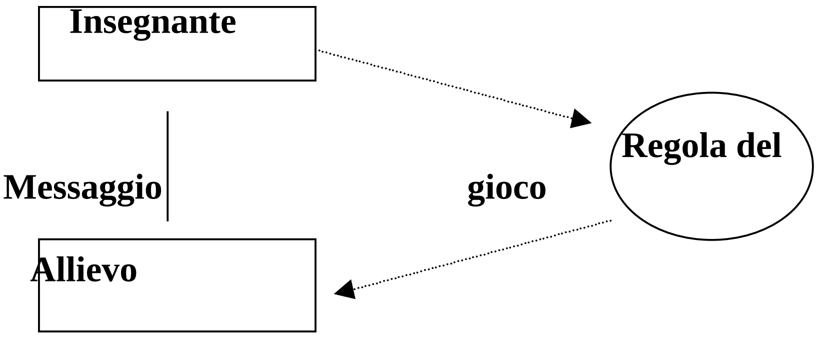
subito dall'altro gruppo. In questo momento, esse possono essere accettate o rigettate. Se sono accettate saranno conservate alla lavagna.
Per ogni proposizione enunciata, l'allievo dovrà provare ad un avversario che è vera o falsa, sia giocando, che per una prova intellettuale.
Per dare più interesse al gioco si può accettare la seguente regola:

- Ogni proposizione enunciata e accettata dalla classe vale 1 punto;
- Ogni proposizione provata falsa da 3 punti al gruppo che lo ha provato.

Nota: se il gioco della scoperta stagna (i ragazzi non trovano più delle proposizioni da enunciare), si rigioca nuovamente.
Alcuni esempi:

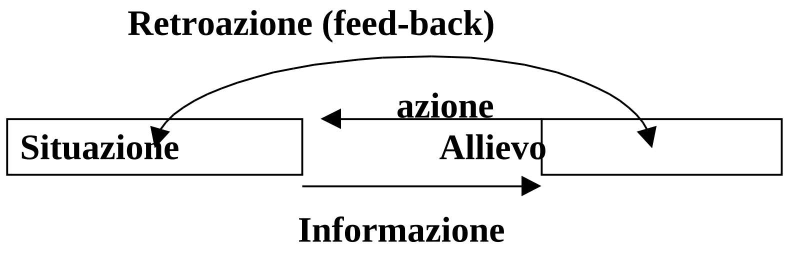
- Se io scrivo 17 sono sicuro di vincere.
- Se scrivo 14, sono sicuro di vincere.

a. **Prima fase della lezione: consegna**



L'enunciato dell'insieme delle regole potrà essere troppo lungo per certi ragazzi. Allora si accompagna la comunicazione del messaggio con un'azione del ragazzo facendolo giocare. Il professore simula la situazione che l'allievo incontrerà nel corso di un normale gioco. In questo caso, ad esempio, la situazione per l'allievo, è la successione dei numeri nel gioco.

d. Situazione d'azione (Gioco di uno contro uno)



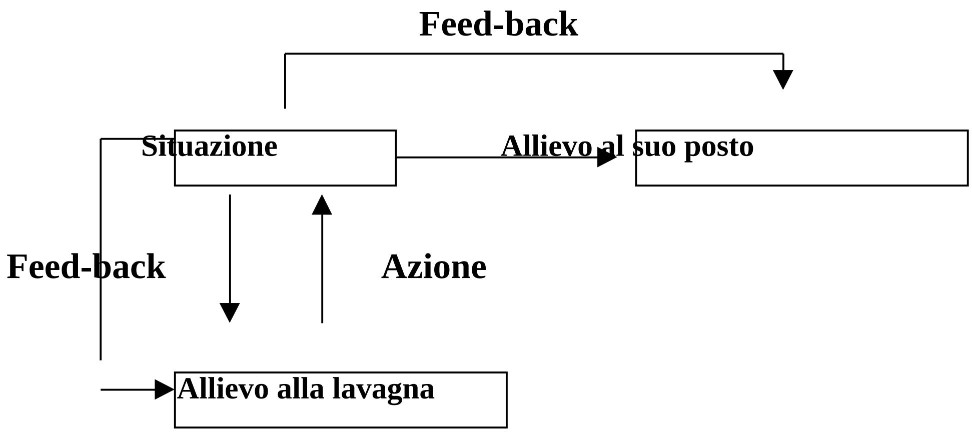
Dialettica dell'azione: Nella misura in cui l'allievo gioco delle nuove parti del gioco, sviluppa strategie. Le strategie vengono messe alla prova e possono essere accettate o rifiutate. L'allievo comunque cerca di costruire delle strategie imparando a risolvere il suo problema.
Questa successione di interazioni tra l'allievo e l'ambiente costituisce la "dialettica dell'azione". La parola "dialettica" spiega meglio questa attività, da parte dell'allievo, ad anticipare sui risultati delle sue scelte in una sorta di dialogo con la situazione.

Chiamiamo modello implicito l'insieme delle relazioni o delle regole secondo le quali l'allievo prende le sue decisioni senza essere capace di averne coscienza e quindi di formularle.
Il modello implicito non coincide con l'insieme del "saper fare".

1. **Situazione di formulazione (gruppo contro gruppo)**

Due parti differenti del gioco:
   a. Quando il rappresentante del gruppo è alla lavagna a giocare
   b. Quando si è ne gruppo a discutere.

Nel primo caso l'allievo che raccoglie le informazione del gruppo è in una situazione d'azione:



Durante le fasi di discussione nel gruppo, la situazione (l'ambiente) per ciascuno degli allievi è costituita dall'insieme delle parti giocate e in particolare dell'ultima parte giocata scritta alla lavagna.
Per vincere non è sufficiente che un allievo sappia giocare (cioè che abbia un modello implicito) ma che sappia indicare ai patners del gruppo quale strategia propone: è il solo modo di intervenire sulla situazione futura.
Dunque ogni allievo è condotto ad anticipare, sarebbe a dire a prendere coscienza delle strategie che egli utilizzerà.
Ma per fare questo deve comunicare!!

La formulazione di una strategia è il solo mezzo che un allievo ha di far applicare quello che lui desidera.

Dialettica della formulazione:
Consiste nel mettere a punto un linguaggio che tutti possano comprendere e che tiene conto degli oggetti e delle relazioni pertinenti della situazione. Questo linguaggio sarà messo alla prova dal punto di vista della sua comprensione, della facilità della costruzione. Questo linguaggio potrà essere un repertorio di informazioni, un vocabolario, a volte sintattico. Ma in ogni caso renderà possibile l'esplicitazione delle azioni e dei modelli d'azione.
Lo schema di formulazione è retto dalle leggi della comunicazione:

c. Condizioni d'intellegibilità qualitativa (sul repertorio e sulla sintassi)
d. Condizioni d'intellegibilità quantitativa (sul debito, il rumore, l'ambiguità, la ridondanza, le capacità di controllo, ecc…)

Situazione di validazione (il gioco della scoperta, prova e dimostrazione)
In questa fase del gioco gli allievi sono sempre divisi in due gruppi concorrenti.

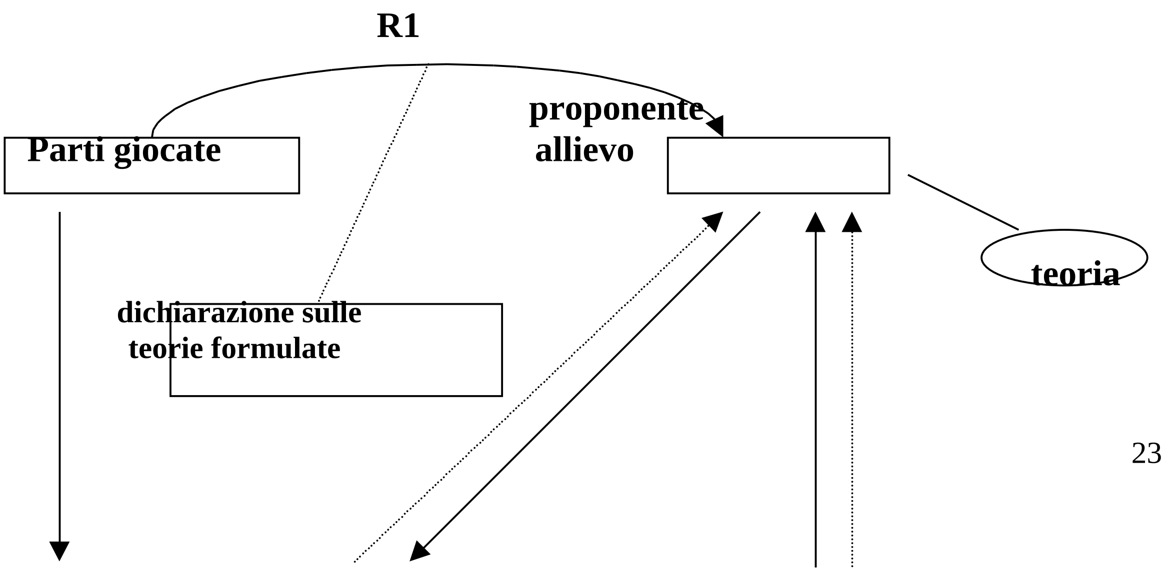
Consegna: Noi faremo adesso un concorso per i migliori teoremi. Noi siamo tutti dei matematici e noi cooperiamo per fare avanzare la scienza aggiungendo delle dichiarzioni "vere".
Per aggiungere un teorema, bisogna proporre una "congettura". Quando questa congettura sarà accettata da tutti, essa diventerà allora un nostro teorema.
Si scriveranno alla lavagna le congetture enunciate alternativamente dai due gruppi.

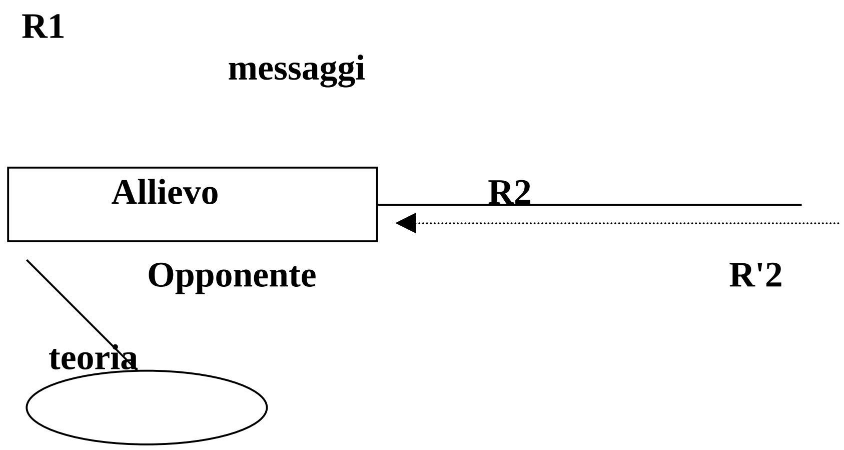
Enunciato allo studio		**Enunciato accettato**
Gruppo A	**Gruppo B**	
Prop: "17 vince"	**Opp: daccordo**	**"17 vince"**

Punteggio A		**Punteggio B**
1		

L'attitudine della prova. Prova e dimostrazione.
Fare matematica significa anche dare dei messaggi di matematica corretti e pertinenti. Significa quindi utilizzare le matematiche per accettare o respingere una proposizione (un teorema), una strategia, un modello.
Il "perché" delle matematiche non può essere appreso solo attraverso il riferimento all'adulto. La verità non è la conformità alle regole. Esige una adesione, una convinzione personale, una interiorizzazione.

Situazione didattica della validazione
All'interno del gruppo gli allievi sono in una situazione assolutamente simmetrica che gli consente la possibilità di discutere, rifiutare, provare tutte le possibili discussioni per la scelta di una strategia comune.
Il rapporto insegnate-allievo non può consentire un tale lavoro da parte dell'allievo.





Situazioni sociali di costruzione o di riorganizzazione di un repertorio di teoremi, cioè di una teoria.

Dialettica della validazione

Lo schema didattico della validazione motiva gli allievi a discutere una situazione e favorisce la formulazione delle loro validazioni implicite, ma spesso i loro ragionamenti sono ancora insufficienti, incorretti. Adottano delle teorie false, accettano delle prove insufficienti o sbagliate.
La situazione didattica deve condurli a evolvere, a rivedere le loro opinioni, a rimpiazzare la loro teoria sbagliata con una vera. Questa evoluzione ha anche un carattere dialettico, bisogna accettare sufficientemente una ipotesi, anche per mostrare che è falsa.
Il sistema di prova funziona alternativamente

- Come mezzo implicito.
- Come mezzo per comunicare .
- Come oggetto di studio messo coscientemente alla prova logica, semantica e pragmatica.

Appendice 1

Proposte di quesiti di Matematica per la prova di ingresso al Corso di Laurea di Scienze della Formazione Primaria di Palermo

Le risposte esatte sono in neretto o in coda al quesito.

1. Sapendo che a e b sono numeri interi relativi e cioè numeri del tipo

…, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, …

il numero a:b è un intero?

a. Sempre.
b. Qualche volta.
c. Mai.
d. Dipende dal valore di a.
e. **Dipende dal valore di b**.

2. Calcola il valore della seguente proporzione:

3 : x = 12 : 84

Scegli il valore richiesto tra i seguenti.

a. 84
b. 18/42
c. Il valore cercato non è tra quelli proposti.
d. 1/21
e. 21

3. Quali delle seguenti relazioni è vera?

a. 3>7
b. 1/2<1/3
c. -2<5/2
d. -3>-1
e. 0,1>0,11

4. Sapendo che

a· (b/2)=c

quale delle seguenti uguaglianze è vera?

a. b=c/a
b. 2· b=c/a
c. 2•c=a•b
d. a· b· 2=0
e. 2· c-a=b

5. Metti in ordine crescente il seguente insieme di numeri:

{1/2; 0,02; 2,2; 0,2; 0,22}

e. {0,2; 0,22; 0,02; 1/2; 2,2}
f. {1/2; 0,02; 0,2; 0,22, 2,2}
g. {0,02; 2,2; 0,2; 0,22; 1/2}
h. {0,02; 0,2; 0,22; 1/2; 2,2}
i. {1/2; 0,02; 0,2; 0,22; 2,2}

6. Un cerchio ha un'area di 340 cm^2, quanto misura il suo raggio?

a. $\frac{\sqrt{350}}{\pi}$

b. $\sqrt{\frac{350}{\pi}}$

c. $\pi \cdot \sqrt{350}$

d. $350 \cdot \sqrt{\pi}$

e. $\sqrt{350 \cdot \pi}$

(La seconda risposta è giusta) ❍

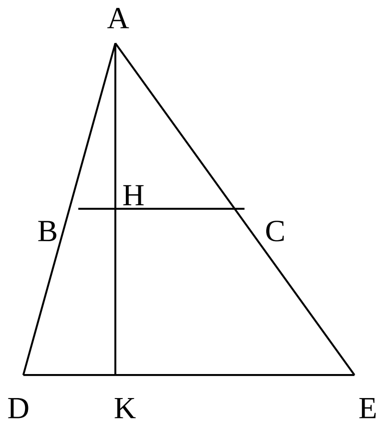
7. Disponi di due urne da cui devi estrarre casualmente una pallina. Quale sceglierestei se il premio si ottiene estraendo il nero ?

A B

c. A è preferibile a B.
d. B è preferibile ad A.
e. Dipende dalla fortuna personale e non si può rispondere.
f. Occorrerebbe fare delle prove per rispondere.
g. E' indifferente scegliere l'una o l'altra.

8. Considera la seguente figura e i dati relativi.

AH = 1/2 AK
BC parallelo a DE



Quali delle seguenti proposizioni è vera?

c. I due triangoli ABC e ADE non sono simili.
d. Il trapezio BDEC ha un'area tripla dell'area del triangolo ABC.
e. L'area di ABC è la metà dell'area di ADE.
f. Il rapporto tra DE e BC non si conosce.
g. BH è uguale ad HC.

Appendice 2

Corso di Didattica della Matematica.
Valutazione Intermedia - 1999/2000
Numeri Naturali: approcci ed operazioni
Ampliamenti Numerici, Trasposizione didattica e Programmi Ministeriali S.E.

Risolvere almeno 4 dei seguenti esercizi.

Considera i due seguenti modelli. Sono verificati gli assiomi del Peano?
Per ciascuno dei due modelli verifica puntualmente tutti gli assiomi.

2. 3 → 4 → 6 → 8

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 8 \\ & & \uparrow & & & & \\ & & 10 & & & & \end{array}$$

3. -2 → 0 → +2 → +4 → +6 → +8 …

b. Ricordiamo che la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione dice che $a(b+c)=ab+ac$; scrivere la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione. E' vera? Se la risposta è affermativa dare la dimostrazione, altrimenti trovare un contro esempio.

c. Dimostrare la proprietà commutativa dell'addizione fra numeri naturali, definita secondo l'approccio cardinale.

d. La sottrazione e la divisione sono operazioni associative? Perché?

e. Dimostrare che l'operazione di addizione fra interi relativi gode della proprietà associativa (Gli interi sono stati introdotti con il metodo delle coppie).

f. Quali attività didattiche sono previste dai programmi ministeriali rispetto alla Logica?

g. Esemplificare le abilità di calcolo previste dai programmi ministeriali attraverso proprietà formali dei numeri Naturali.

Schema di tesina per la valutazione della seconda parte del corso

Didattica della Matematica Anno accademico 1999/2000

La tesina sarà costituita da 4 parti:

j. **Analisi comparativa di due o più testi di scuola elementare differenti per impostazione. Tale analisi dovrà essere fatta sia per il 1° ciclo che per il 2° ciclo. Per il 1° ciclo si cercherà di mettere in evidenza il ruolo degli approcci al numero naturale. Per il 2° ciclo si potranno evidenziare i metodi di introduzione alle proprietà formali, la loro coerenza con gli approcci al numero, le relazioni tra il calcolo mentale e le proprietà formali.**

k. **Analisi a-priori di una situazione/problema riguardante l'aritmetica del 1° ciclo o del 2° ciclo. Lo schema dell'analisi a-priori deve riguardare i tre momenti: analisi epistemologica, analisi storico-epistemologica, comportamenti attesi da parte degli allievi.**

l. **Sperimentazione della situazione/problema nell'ambito del lavoro del**

tirocinio. Analisi dei dati sperimentali (protocolli, analisi statistica, ecc…) (facoltativo).

m. **Messa a punto di una situazione a-didattica riguardante l'aritmetica. Definizione della situazione. Ruolo dell'insegnante. Descrizione delle consegne per gli allievi. Analisi delle fasi d'azione, di formulazione, di validazione.**

Sono attribuiti 5 punti per una completa dei primi due punti. Per il 4° punto è invece attribuito un punteggio di 4 punti.

Appendice 3

Schema di riferimento per la fase sperimentale.

9. **Definire chiaramente l'ipotesi o le ipotesi riguardanti questa fase di ricerca in didattica di natura sperimentale.**
10. **Descrivere gli strumenti di falsificazione della fase sperimentale.**
    Cioè motivare bene l'utilizzo di strumenti tipo: situazione/problema, questionario, situazione didattica.
11. **Analisi a-priori dell'intervento didattico.**
12. **Prevedere la raccolta dei dati sperimentali per una eventuale analisi statistica. Utilizzare EXCEL per la registrazione dei dati.**
13. **Allegare i protocolli, se esistono, di interviste singole o a coppia.**
14. **Allegare, se esistono, brevi commenti riguardanti l'osservazione della fase sperimentale in classe.**
15. **Analisi dei risultati e commento delle ipotesi di partenza.**
16. **Conclusione:**
    - **n. l'ipotesi è stata falsificata?**
    - **o. Gli strumenti utilizzati sono stati adeguati al lavoro sperimentale?**
    - **p. Quali sono i risultati stabili del lavoro sperimentale?**
    - **q. Quali sono i problemi aperti?**

Appendice 4

Corso di Didattica della Matematica.

Valutazione Intermedia 2° compito - 1999/2000
Numeri Naturali: approcci ed operazioni
Ampliamenti Numerici, Trasposizione Didattica e Programmi Ministeriali S.E.

Risolvere almeno 4 dei seguenti esercizi.

h. Considera i due seguenti modelli. Sono verificati gli assiomi del Peano?
Per ciascuno dei due modelli verifica puntualmente tutti gli assiomi.

e. 7 → 9 → 11 → 13

↑

15

4. -6 → -2 → +2 → +6 → +10 → +14 …

i. Dimostrare la proprietà commutativa dell'addizione servendosi degli assiomi di Peano.
j. Dimostrare la proprietà associativa dell'addizione fra numeri naturali, definita secondo l'approccio cardinale.
k. Dimostrare che l'operazione di addizione fra interi relativi gode della proprietà distributiva della somma rispetto alla moltiplicazione (Gli interi sono stati introdotti con il metodo delle coppie).

Commentare i programmi ministeriali riguardo al calcolo e all'uso degli algoritmi.

Appendice 5

Situazione Didattica

Una situazione è l'insieme delle circostanze nelle quali una persona si trova, delle relazioni che la uniscono al suo ambiente (milieu).

Possiamo considerare una situazione come un modello di interazione di un soggetto con un certo "milieu" che determina una conoscenza data come mezzo, per il soggetto, per ottenere o per conservare in questo "milieu" uno stato favorevole.

f. La situazione è l'ambiente dell'allievo preparato e manipolato dall'insegnante che la considera come uno strumento?

g. La situazione didattica è l'ambiente tutto intero dell'allievo, l'insegnante ed il sistema educativo compreso?

r. *Variabile cognitiva*: variabile della situazione tale che per la scelta di valori differenti può provocare dei cambiamenti della conoscenza ottimale.

s. *Variabile didattica*: quelle che tra le variabili cognitive possono essere fissate dall'insegnante.